Übungen zu Mathematik III

Blatt 1

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Richtungsableitungen der folgenden Skalarfelder im angegebenen Punkt P in Richtung v:

a) $f(x, y) = x^2y + y^3$, $P = (1, 1)$, $v = (1, -1)^T$.

b) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2e^{2x_3}$, $P = (1, -1, 0)$, $v = (1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 2: Wir betrachten ein Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Der zugehörigen Höhenlinienplot wird in Abb. 1 gezeigt. Skizzieren Sie schematisch die Gradienten in den drei eingezeichneten Punkten. Auf was müssen Sie achten?

Aufgabe 3: Wir betrachten den Ortsvektor $\vec{r}$ in der Ebene und im Raum:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

a) Skizzieren Sie das Vektorfeld für den 2D Fall.

b) Welches Ergebnis erwarten Sie für die Divergenz von $\vec{r}$ auf Grund ihre Skizze?

c) Berechnen Sie die Divergenz und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Vermutung.

d) Welches Ergebnis erwarten Sie für die Rotation von $\vec{r}$?

e) Berechnen Sie die Rotation und vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Vermutung.

Aufgabe 4: Wo besitzt das folgende Vektorfeld Quellen und Senken? Wo ist es quellfrei?

$$\vec{F}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1x_2^2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Abbildung 2 zeigt eine dünne, homogene Scheibe, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega_0 \cdot \vec{e}_3$ um die Symmetrieachse (x_3-Achse) rotiert.

Betrachten wir ein beliebiges Teilchen mit Ortsvektor $\vec{r}$ auf der Scheibe, so besitzt dieses den Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -\omega_0 x_2 \\ \omega_0 x_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

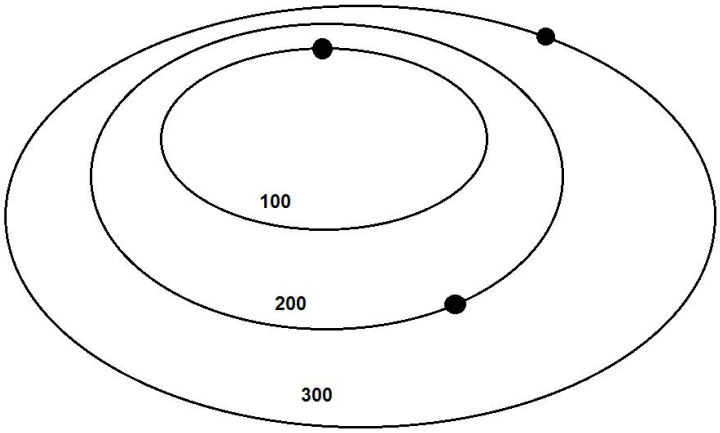


Abbildung 1: Höhenlinien für Aufgabe 2.

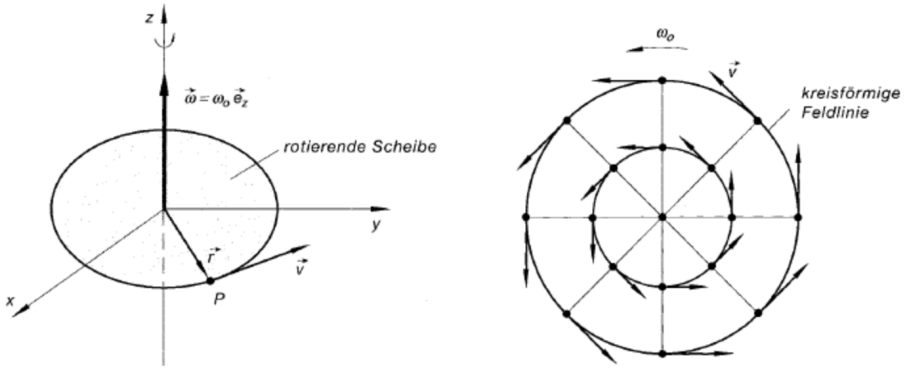


Abbildung 2: Rotierende Scheibe (links) und zugehöriges Geschwindigkeitsfeld (rechte) zu Aufgabe 5.

Zeigen Sie, dass dieses ebene Geschwindigkeitsfeld ein Wirbelfeld ist, indem Sie die Rotation ausrechnen und nachweisen, dass diese nicht verschwindet. Betrachten Sie dazu auch den Plot des Geschwindigkeitsfeldes. Was würden Sie erwarten wenn Sie ein Wasserrad in diesem Vektorfeld positionieren?